§10 Der zweite Satz von Gelfand-Naimark

In diesem Abschnitt wollen wir beweisen, dass jede C^*-Algebra A isometrisch isomorph zu einer C^*-Unteralg. von $L(H)$ für einen $\mathbb{C}$-HR H ist. Ist A separabel, so kann $H = \ell^2(\mathbb{N})$ gewählt werden.

10.1 Definition (1) Sei A eine C^*-Algebra und sei $\{0\} \neq H$ ein $\mathbb{C}$-HR. Ein $*$-Homom. $\pi : A \to L(H)$ heißt <u>$*$-Darstellung</u> von A auf H. Eine $*$-Darst. $\pi : A \to L(H)$ heißt

(a) <u>treu</u>, falls π injektiv.

(b) <u>nichtentartet</u>, falls $\overline{\pi(A)H} = H$, wobei
$\pi(A)H := LH\{\pi(a)\xi \mid a \in A, \xi \in H\}$.
(<u>Man kann zeigen, dass dann schon</u>
<u>$\overline{\pi(A)H} = \{\pi(a)\xi \mid a \in A, \xi \in H\}$ gilt.</u>
<u>Stichwort: Cohen's Faktorisierungssatz.</u>)

(c) <u>zyklisch</u>, falls ein $\xi \in H$ ex. mit
$\pi(A)\xi = \{\pi(a)\xi \mid a \in A\}$ dicht in H.
ξ heißt dann zyklischer Vektor für π.

(2) Zwei Darstellungen $\pi : A \to L(H)$, $\rho : A \to L(H')$ heißen (unitär) <u>äquivalent</u> (Bez. $\pi \simeq \rho$), falls ein unitärer Operator $V : H \to H'$ existiert mit
$$V\pi(a) = \rho(a)V \quad \forall a \in A.$$
Sehr oft werden äquiv. Darst. als "gleich" angesehen, d.h. man betrachtet nur Äquivalenzklassen von Darstellungen.

(3) Ist $\{H_i \mid i \in I\}$ eine Familie von $\mathbb{C}$-HR und ist $\pi_i : A \to L(H_i)$ $*$-Darst. von A $\forall i \in I$, so ist die <u>direkte Summe</u> $\pi := \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ auf $H := \bigoplus_{i \in I} H_i$ def. durch

$$\pi(a)\Big(\sum_{i \in I} \xi_i\Big) = \sum_{i \in I} \pi_i(a)\xi_i$$

<u>Erinnerung</u>: $\bigoplus_{i \in I} H_i$ ist der HR bestehend aus aus allen Tupeln $(\xi_i)_{i \in I}$ (geschrieben als $\sum_i \xi_i$) mit $\xi_i \in H_i$ und $\|\sum_i \xi_i\|^2 := \sum_{i \in I} \|\xi_i\|^2 < \infty$. Das Skalarprodukt $\langle \sum \xi_i, \sum \zeta_i \rangle$ ist dann geg. durch

$$\langle \sum_i \xi_i, \sum_i \zeta_i \rangle = \sum_i \langle \xi_i, \zeta_i \rangle \in \mathbb{C}.$$

<u>10.2</u> <u>Bem</u> (1) Ist $\pi : A \to L(H)$ treu, so ist nach 6.9 $\pi : A \to \pi(A) \subseteq L(H)$ ein isometr. $*$-hom. zwischen A und der C^*-Unteralg. $\pi(A) \subseteq L(H)$. Unser Ziel ist es daher, für jede C^*-Algebra A eine treue Darst. $\pi : A \to L(H)$ zu konstruieren.

(2) Ist $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ $*$-Darst. auf $H = \bigoplus_{i \in I} H_i$, so gilt für $a \in A$: $\pi(a) = 0 \iff \pi_i(a) = 0$ $\forall i \in I$.

<u>Bew</u> Wir erhalten $\operatorname{Ker} \pi = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Kern} \pi_i$.
Wenn wir also genügend viele Darst. π_i finden, so dass für jedes $a \in A$ ein $i \in I$ ex. mit $\pi_i(a) \neq 0$, so ist $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ eine treue Darst. von A.

<u>10.3</u> <u>Lemma</u> Sei $\pi : A \to L(H)$ eine nichtentartete $*$-Darst. von A und sei $(u_\lambda)_\lambda$ eine approx. Eins für A mit $\|u_\lambda\| \leq 1$ $\forall \lambda \in \Lambda$. Dann gilt $\forall \xi \in H$:

$$\pi(u_\lambda)\xi \to \xi.$$

Bew: Sei $\eta = \sum_{k=1}^{\ell} \pi(a_k)\eta_k \in \pi(A)H$. Dann folgt
$$\pi(u_\lambda)\eta = \sum_{k=1}^{\ell} \pi(u_\lambda a_k)\eta_k \xrightarrow{u_\lambda a_k \to a_k} \sum_{k=1}^{\ell} \pi(a_k)\eta_k = \eta.$$
(da π autom. stetig). Ist dann $\xi \in H$ bel. und $\varepsilon > 0$, so ex. nach Vor. ein η wie oben mit $\|\xi - \eta\| < \frac{\varepsilon}{3}$, und dann folgt
$$\|\pi(u_\lambda)\xi - \xi\| \le \underbrace{\|\pi(u_\lambda)(\xi - \eta)\|}_{\le \|u_\lambda\| \|\xi - \eta\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\pi(u_\lambda)\eta - \eta\|}_{\to 0} + \underbrace{\|\xi - \eta\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}}. \qquad \blacksquare$$

10.4 Bem+Def Ist $\pi : A \to L(H)$ eine $*$-Darst und ist $\xi \in H$, so wird durch
$$\varphi_{\pi,\xi} : A \to \mathbb{C} \; ; \; \varphi_{\pi,\xi}(a) := \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$$
ein positives lin. Funktional auf A def. mit $\|\varphi_{\pi,\xi}\| \le \|\xi\|^2$, denn es gilt $\forall a \in A$:
$$\varphi_{\pi,\xi}(a^*a) = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle \ge 0$$
und $|\varphi_{\pi,\xi}(a)| = |\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle| \overset{C-S}{\le} \|\pi(a)\| \|\xi\|^2 \le \|a\| \|\xi\|^2$, da jeder $*$-Homom zwischen C^*-Algebren normfallend ist.

Ist $\pi : A \to L(H)$ nichtentartet, so gilt sogar $\|\varphi_{\pi,\xi}\| = \|\xi\|^2$, denn nach 9.6 und 10.3 gilt für eine approx. Eins $(u_\lambda)_\lambda$ wie in 8.2:
$$\|\varphi_{\pi,\xi}\| = \lim_\lambda \varphi_{\pi,\xi}(u_\lambda) = \lim_\lambda \langle \pi(u_\lambda)\xi, \xi \rangle \overset{10.3}{=} \langle \xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2.$$
Insb. folgt $\varphi_{\pi,\xi} \in S(A)$ g.d.w. $\|\xi\| = 1$.

10.5 Satz (GNS-Konstruktion) [Gelfand-Naimark-Segal]
Sei A eine C^*-Algebra und sei $\varphi \in S(A)$. Dann ex. ein $\mathbb{C}$-HR H_φ, eine zyklische Darstellung $\pi_\varphi : A \to L(H_\varphi)$ und ein $\xi_\varphi \in H_\varphi$ mit $\|\xi_\varphi\| = 1$, so dass:

(1) ξ_φ ist ein zyklischer Vektor für π_φ.
(2) Es gilt $\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \ \forall a \in A$
(also $\varphi = \varphi_{\pi_\varphi, \xi_\varphi}$)

Ferner gilt: Ist $\varrho : A \to L(H)$ eine weitere $*$-Darst. und ist $\eta \in H$ mit $\overline{\varrho(A)\eta} = H$ und

$$\varphi(a) = \varphi_{\varrho,\eta}(a) = \langle \varrho(a)\eta, \eta \rangle \quad \forall a \in A,$$

so ex. ein unitärer Operator $V : H_\varphi \to H$ mit $V\xi_\varphi = \eta$ und $\varrho(a)V = V\pi_\varphi(a) \ \forall a \in A$
(also gilt insb. $\varrho \simeq \pi_\varphi$ via V).

<u>Beweis</u>: Sei zunächst A mit $\mathbb{1}$. Wir def.

$$N := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\}, \quad H_0 := A/N \text{ und}$$

$$\langle\,,\rangle : H_0 \times H_0 \to \mathbb{C};\ \langle a+N, b+N \rangle := \varphi(b^*a).$$

Dann ist $\langle\,,\rangle$ ein Skalarprodukt auf H_0 (Notiz 9.2 und 9.3), und wir setzen

$$H_\varphi := \overline{H_0}^{\langle,\rangle}, \text{ die Vervollständigung von } H_0.$$

Für $a \in A$ def.

$$\pi_\varphi(a) : H_0 \to H_0;\ \pi_\varphi(a)(b+N) = ab+N.$$

Wegen $0 \le a^*a \le \|a\|^2 \mathbb{1}$ folgt $0 \le b^*a^*ab \le b^*\|a\|^2 b = \|a\|^2 b^*b$ (7.15) und damit folgt:

$$\|\pi_\varphi(a)(b+N)\|^2 = \langle ab+N, ab+N \rangle = \varphi(b^*a^*ab)$$
$$\underset{\varphi \ge 0}{\le} \varphi(\|a\|^2 b^*b) = \|a\|^2 \varphi(b^*b) = \|a\|^2 \|b+N\|^2$$

und damit ist $\pi_\varphi(a)$ stetig mit $\|\pi_\varphi(a)\| \le \|a\|$.
Nach FA ex. damit eine eind. Fortsetzung von $\pi_\varphi(a)$ auf $H_\varphi = \overline{H_0}^{\langle,\rangle}$.

Man rechnet dann nach, dass $\pi_\varphi : A \to L(H_\varphi)$; $a \mapsto \pi_\varphi(a)$ ein $*$-Homom. ist, z.B. gilt

$$\langle \pi_\varphi(a^*)(b+N), c+N \rangle = \langle a^*b+N, c+N \rangle = \varphi(c^*a^*b)$$
$$= \varphi((ac)^*b) = \langle b+N, ac+N \rangle = \langle b+N, \pi_\varphi(a)(c+N) \rangle,$$

also $\pi_\varphi(a^*) = \pi_\varphi(a)^*$.

Sei nun $\xi_\varphi = 1+N \in H_0 \subseteq H_\varphi$. Dann gilt

$$\varphi(a) = \varphi(1^* a) = \langle a+N, 1+N\rangle = \langle \pi_\varphi(a)(1+N), 1+N\rangle$$
$$= \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle,$$

also $\varphi = \varphi_{\pi_\varphi, \xi_\varphi}$ und ferner gilt $\overline{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi} = \overline{A+N} = \overline{H_0}$ $= H_\varphi$, also ist ξ_φ zyklischer Vektor. Wegen

$$1 = \|\varphi\| = \varphi(1) = \|\xi_\varphi\|^2 \text{ gilt auch } \|\xi_\varphi\| = 1.$$

Sei nun A ohne 1. Dann betrachten wir die Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in \mathcal{Y}(A^1)$ von φ und verfahren wie oben mit $\tilde{\varphi}$. Wir erhalten dann eine Darstellung $\pi_{\tilde{\varphi}} : A^1 \to L(H_{\tilde{\varphi}})$.

Setze $H_\varphi := H_{\tilde{\varphi}}$, $\pi_\varphi = \pi_{\tilde{\varphi}}|A$.

Die einzige Eigenschaft in (1)+(2) die nicht sofort klar ist, ist die Gleichung $\overline{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi} = H_\varphi$, dass also ξ_φ zykl. Vektor für H_φ ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\overline{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi} = \overline{\pi_{\tilde{\varphi}}(A^1)\xi_\varphi}$ gilt; und dass folgt, wenn wir zeigen, dass

$$\xi_\varphi = \pi_{\tilde{\varphi}}(1)\xi_\varphi \in \overline{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi}$$

(da $\pi_{\tilde{\varphi}}(A^1)\xi_\varphi = \pi_\varphi(A)\xi_\varphi + \mathbb{C}\xi_\varphi$).

Einsetzen einer approx. Eins $(u_\lambda)_\lambda$ mit $0 \le u_\lambda \le 1$ liefert

$$\|\pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi - \xi_\varphi\|^2 = \|\pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi\|^2 - \langle \pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle - \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi\rangle + \ldots$$

$$= \langle u_\lambda + N, u_\lambda + N\rangle - \langle u_\lambda + N, 1+N\rangle - \langle 1+N, u_\lambda+N\rangle + \langle 1+N, 1+N\rangle$$
$$= \underbrace{\varphi(u_\lambda^2)}_{\overset{(*)}{\to} 1} - 2\underbrace{\varphi(u_\lambda)}_{\to 2} + \underbrace{\tilde{\varphi}(1)}_{=1} \to 0,$$

(*) Denn mit $(u_\lambda)_\lambda$ ist auch $(u_\lambda^2)_\lambda$ eine approx. Eins von A, da $\|u_\lambda^2 a - a\| \le \|u_\lambda\| \|u_\lambda a - a\| + \|u_\lambda a - a\| \to 0$.

Es folgt $\pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi \to \xi_\varphi$, also $\xi_\varphi \in \overline{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi}$.

Sei nun $\varrho : A \to L(H')$ und $\zeta \in H'$ mit $\varphi = \varphi_{\varrho,\zeta}$ und $\overline{\varrho(A)\zeta} = H'$. Dann def. wir
$$V : H_0 \to H', \quad V(a+N) = \varrho(a)\zeta.$$
Dann ist V linear mit
$$\langle V(a+N), V(b+N)\rangle = \langle \varrho(a)\zeta, \varrho(b)\zeta\rangle = \langle \varrho(b^*a)\zeta, \zeta\rangle$$
$$= \varphi(b^*a) = \langle a+N, a+N\rangle,$$
d.h. V ist isometrisch, und wegen $\overline{V(H_0)} = \overline{\varrho(A)\zeta} = H'$ besitzt V eine isometr. + surjektive, also unitäre Fortsetzung $V : H_\varphi \to H'$ mit
$$V\pi_\varphi(a)(b+N) = V(ab+N) = \varrho(ab)\zeta = \varrho(a)\varrho(b)\zeta$$
$$= \varrho(a)V(b+N) \quad \forall\, a,b \in A,$$
also $V\pi_\varphi(a) = \varrho(a)V \quad \forall a \in A$ $\boxtimes$

Wir sind nun bereit für:

10.6 Satz (Gelfand-Naimark '43)

Sei A eine C^*-Algebra. Dann ex. eine treue nichtentartete $*$-Darst. $\pi : A \to L(H)$ für einen geeigneten $\mathbb{C}$-HR H. Ist A separabel, so kann auch H separabel gewählt werden (dann folgt $H \cong \mathbb{C}^n$ oder $H = \ell^2(\mathbb{N})$).

Beweis: Setze $\pi := \bigoplus_{\varphi \in S(A)} \pi_\varphi$. Wegen $\overline{\pi_\varphi(A)H_\varphi} = H_\varphi$ für alle $\varphi \in S(A)$ gilt dann auch $\overline{\pi(A)H} = H$ für $H = \bigoplus_\varphi H_\varphi$, d.h. π ist nicht entartet.

Ist nun $0 \neq a \in A$, so ex. nach 9.13 ein $\varphi \in S(A)$ mit $\|a\|^2 = \varphi(a^*a) = \langle a+N, a+N\rangle = \langle \pi_\varphi(a)\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi\rangle$
$$= \|\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\|^2$$
Damit folgt $\|\pi_\varphi(a)\| \geq \|a\|$, und da π_φ $*$-Homom.

gilt auch $\|\pi_\varphi(a)\| \leq \|a\|$, also $\|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$.
Insb. folgt $\pi_\varphi(a) \neq 0$, und dann auch
$\pi(a) \neq 0$. Damit ist π treu und isometrisch.

Sei nun A separabel. Wähle eine dichte Folge $(a_n)_n \in A$ und $\varphi_n \in S(A)$ mit $\|\varphi_n(a_n^* a_n)\| = \|a_n\|^2$.
Dann ist auch $\tilde{\pi} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_{\varphi_n}$ eine treue Darst.
auf dem separablen HR $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_{\varphi_n}$, denn:

(1) Ist $0 \neq a \in A$ beliebig, so wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|a_n - a\| < \frac{\|a\|}{2}$. Dann folgt

$$\|\pi_{\varphi_n}(a_n) - \pi_{\varphi_n}(a)\| < \frac{\|a\|}{2} \quad \text{und}$$

$$\|\pi_{\varphi_n}(a)\| \geq \|\pi_{\varphi_n}(a_n)\| - \|\pi_{\varphi_n}(a_n) - \pi_{\varphi_n}(a)\| > \|a_n\| - \frac{\|a\|}{2}$$
$$> 0, \text{ da } \|a_n\| > \frac{\|a\|}{2}.$$

Damit folgt auch $\tilde{\pi}(a) \neq 0$, d.h. $\tilde{\pi}$ ist treu.

(2) Jedes H_{φ_n} ist separabel, da $\{a_n + N \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H_{φ_n} ist, denn

$$\|(a_n + N) - (a + N)\|^2 = \varphi((a_n - a)^*(a_n - a)) \leq \|a_n - a\|^2,$$

da $\|\varphi\| = 1$.

Damit besitzt jedes H_{φ_n} eine abzb. ONB und die abzb. Vereinigung dieser abzb. ONBs ist eine abzb. ONB von H. ∎